Die Poisson-Verteilung

Um was geht es?

Die Poisson-Verteilung dient der Beschreibung der Anzahl von Ereignissen je Betrachtungseinheit (Baugruppe, Teil). Mit ihr können analog zur Binomialverteilung Wahrscheinlichkeiten und Vertrauensbereiche ermittelt werden.

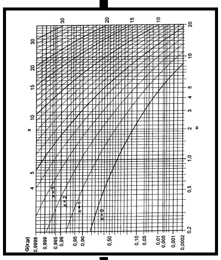
Inhalt dieses Heftes:

Erwartungswert 4 Anrufe je Minute

Frage: **Wie häufig muß man mit 6 Anrufen je Minute rechnen?**

$$g(x) = \frac{\mu^X}{x!} \cdot e^{-\mu}$$

G(6) = g(o) + g(1) + ...+ g(6)
G(6) = 1,8+7,3+14,6+19,5+15,6+10,4
G(6) = 88,9%



G(6) = 88,9%

Mögliche Ereignisse je Betrachtungseinheit:

- Fehler je Teil
- Operationen pro Patient
- Buchungen je Quartal
- Bestellungen je Kunde
- fehlerhafte Leistungen je Mitarbeiter
- Krankheitstage je Mitarbeiter
- Reklamationen je Kunde
- Beschwerden je Hotelgast
- Verbesserungsvorschläge je Mitarbeiter
- Fehler je Rechnung
- Störungen je Tag
- Anfragen je Woche
- Neukunden je Quartal
- Telefonanrufe je Stunde

4g

Die Poisson-Verteilung

Wenn es um seltene Ereignisse geht, etwa "Fehlstellen auf einer Oberfläche" oder "Fehler je Baugruppe", so lassen sich diese nur mit der Poisson-Verteilung beschreiben.
Vergleich der beiden diskreten Verteilungen:

Binomialverteilung:
Ist die Fehlerhäufigkeit in der Gesamtheit bekannt, so kann man mit der Binomialverteilung die Wahrscheinlichkeit ausrechnen, mit der man in einer Stichprobe von n Teilen genau x fehlerhafte Teile findet.

Poisson-Verteilung:
Ist die durchschnittliche Anzahl der Fehler je Baugruppe bekannt, so kann man mit der Poisson-Verteilung die Wahrscheinlichkeit ausrechnen, mit der man in der Stichprobe genau x Fehler findet.

$$g(x) = \frac{\mu^x}{x!} \cdot e^{-\mu}$$

μ = Mittelwert der Fehler je Baugruppe (μ = n*p)
x = Anzahl der Fehler
g(x) = Wahrscheinlichkeit für die Beobachtung von **genau x** Fehlern.
G(x) = Wahrscheinlichkeit für die Beobachtung von **bis zu x** Fehlern
Für μ <= 10 erhält man eine linksschiefe Verteilung, die mit größerwerdendem μ immer glockenförmiger und symmetrischer wird.

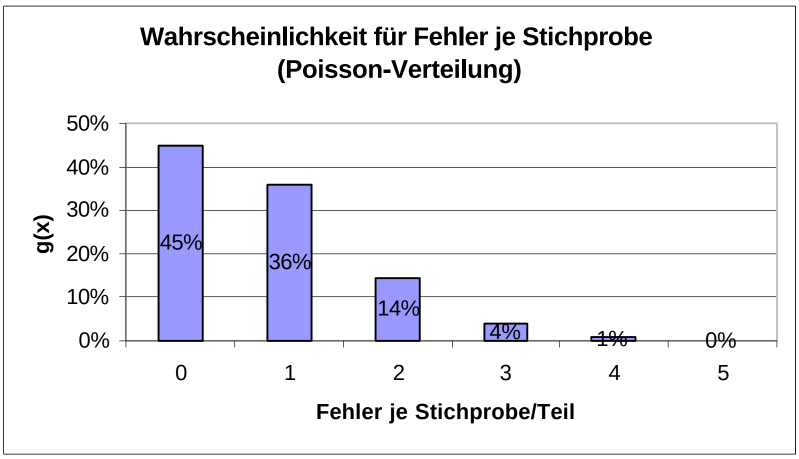
__**Beispiel:**__
In einem Tauchbad wird Kupferdraht mit einer Lackschicht überzogen. Auf 100m Lackdraht werden 80 Fehlstellen gezählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit g(x), daß x = 0, 1, 2, 3 Fehler auf 1m Draht gefunden werden?

Lösung:
μ = 80/100 = 0,8 Fehlstellen pro 1m Draht
$g(0) = 0{,}8^{0}/0! * e^{-0{,}8} = 0{,}4493 =$ __**44,93%**__
$g(1) = 0{,}8^{1}/1! * e^{-0{,}8} = 0{,}3594 =$ __**35,94%**__
$g(2) = 0{,}8^{2}/2! * e^{-0{,}8} = 0{,}1438 =$ __**14,38%**__
$g(3) = 0{,}8^{3}/3! * e^{-0{,}8} = 0{,}0383 =$ __**3,83%**__

Zusatzfrage: Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird man bis zu 3 Fehler in der Stichprobe finden?

Es gilt: G(3) = g(0) + g(1) + g(2) + g(3) = 44,93 + 35,94 + 14,38 + 3,83 = __**99,08%**__

g(x) mit EXCEL:
g(A1) =POISSON(A1;0,8;FALSCH)

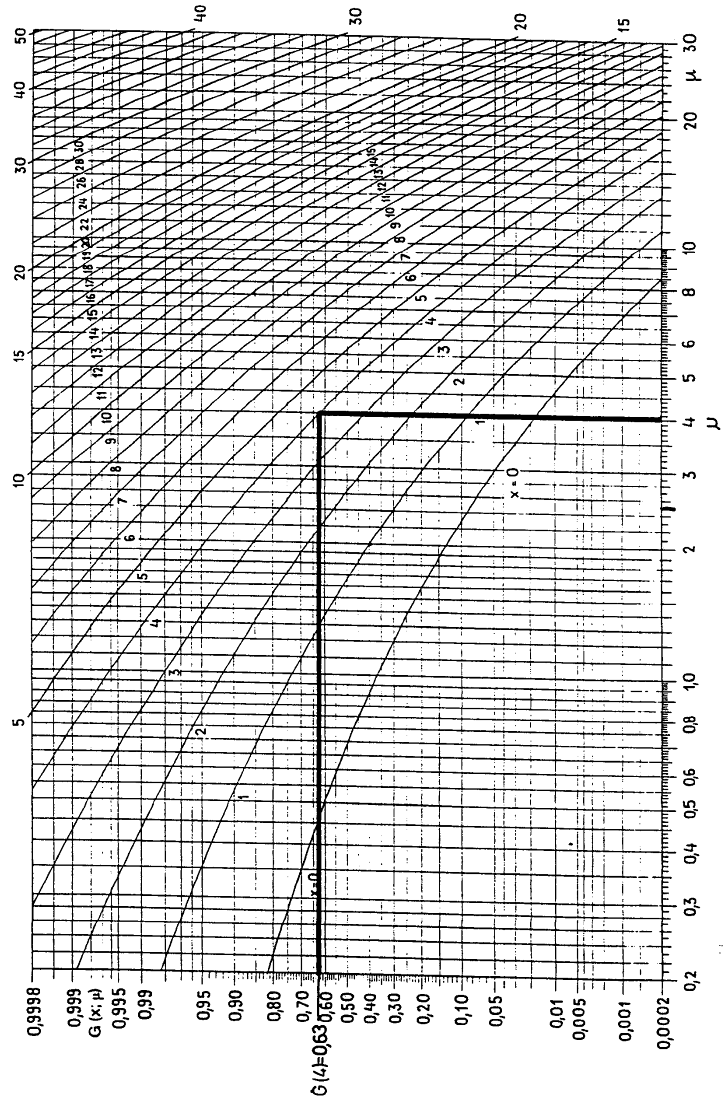


Die Wahrscheinlichkeiten im Thorndike-Nomogramm

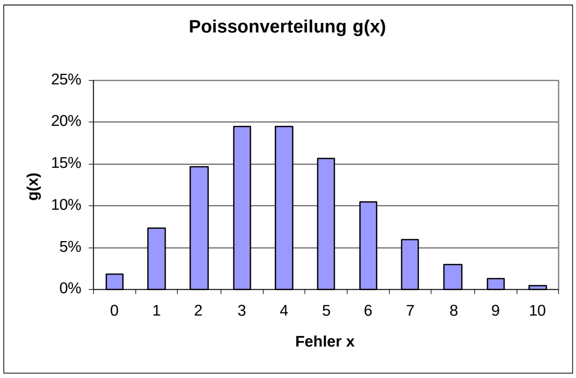
Das Thorndike-Nomogramm ist ein praktisches Hilfsmittel zur Findung der Wahrscheinlichkeiten der Poisson-Verteilung. Ausgehend vom Erwartungswert μ (Durchschnittliche Fehlerzahl pro Baugruppe) kann für eine Anzahl Fehler x die Summenwahrscheinlichkeit G(x) gefunden werden. Wird g(x) gesucht, so gilt wie beim Larson-Nomogramm: g(3) = G(3) - G(2)

Beispiel :
Gegeben μ = 4, x = 4
Gesucht G(x) = ?

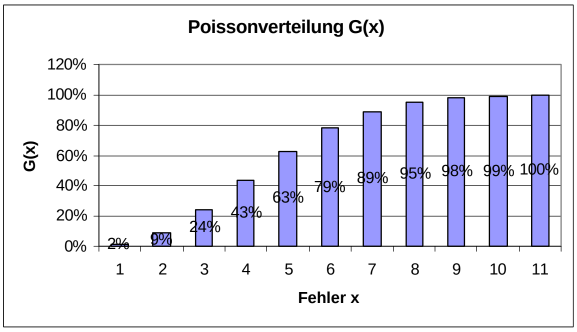
Lösung mit Thorndike:
Von μ = 4 zu x = 4 und unten wird dann die Wahrscheinlichkeit (G4), bis zu 4 Fehler je Teil zu finden, abgelesen.



Die Einzelwahrscheinlichkeiten



Die Summenwahrscheinlichkeit



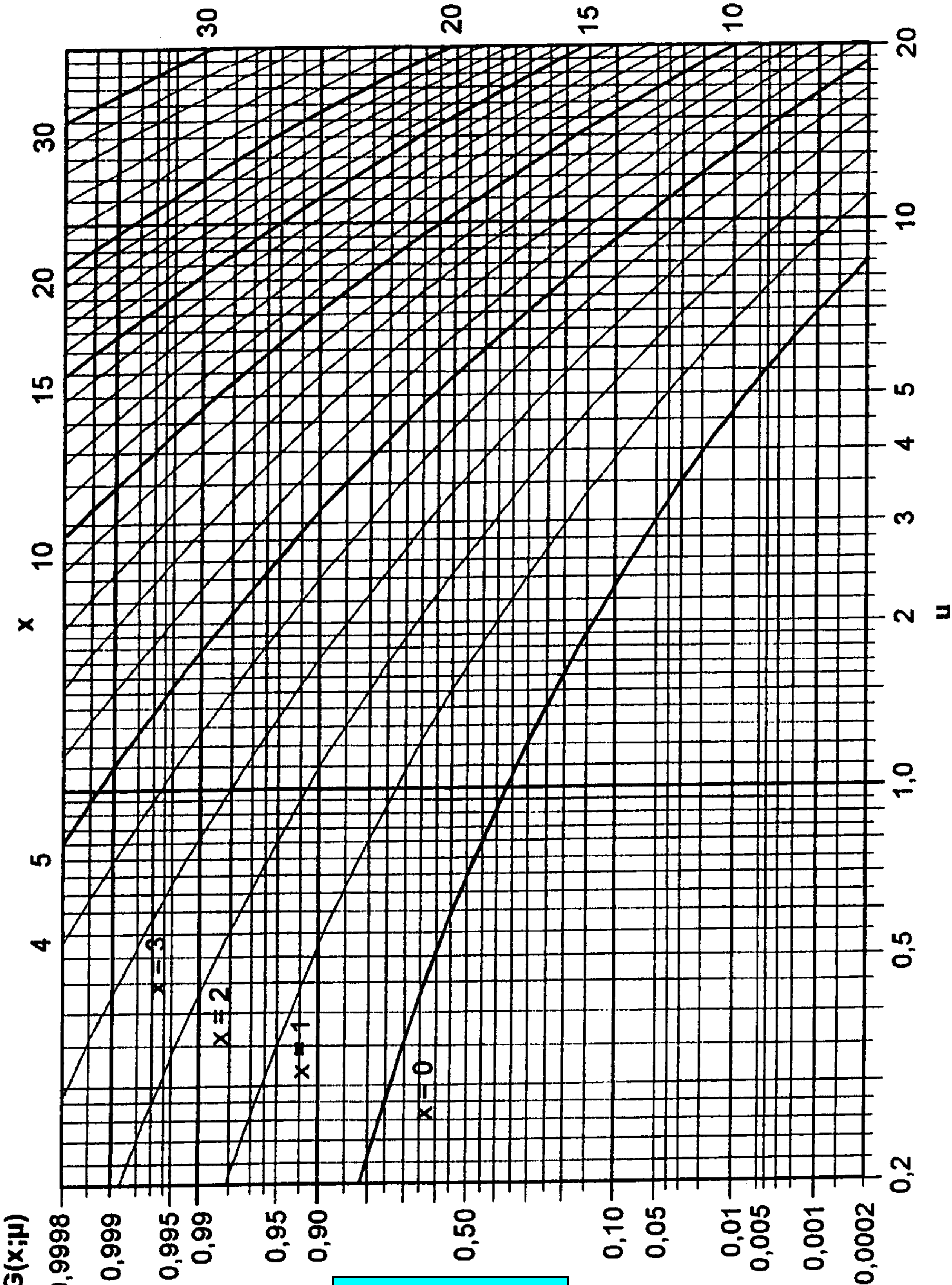
Typische Fragestellungen:

genau x = 4:	G(4)-G(3)
bis zu x = 4:	G(4)
mindestens x = 4:	1 - G(3)
mehr als x = 4:	1 - G(4)
weniger als x = 4:	G(3)

Aufgabe:
Die Lackierung von Gehäusen erfolgt mit einem Mittelwert von 2 Lackfehlern je Gehäuse. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für:

a) genau 1 Lackfehler pro Gehäuse?
b) höchstens 1 Lackfehler pro Gehäuse?
c) mindestens 3 Lackfehler pro Gehäuse?

Thorndike-Nomogramm



$$G(x) = \sum_{i=0}^{x} \frac{\mu^i}{i!} \cdot e^{-\mu}$$