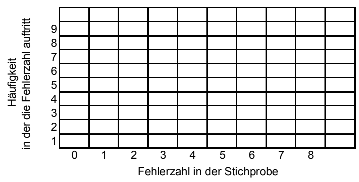
4b. Wahrscheinlichkeit und Binomialverteilung

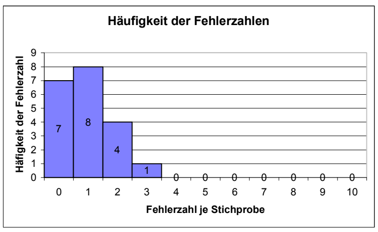
Um was geht es?



Zufälle sind im Einzelfall nicht vorhersehbar. Bei einer großen Zahl von Ereignissen können in der Regel dennoch Aussagen gemacht werden, nämlich

man kann bestimmen, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Ereignis eintritt.

Wozu dient die Wahrscheinlichkeit?



Kennt man erst die Wahrscheinlichkeit, mit der z.B. ein Fehler auftritt, dann kann man in Stichproben feststellen, ob ein Prozeß beherrscht ist.
Fehler in Stichproben sind in der Regel binomialverteilt.

Mit Hilfe der Binomialverteilung kann man errechnen, bei welcher Fehlerzahl in der Stichprobe eingegriffen werden muß.

Wie wird vorgegangen?

Wahrscheinlichkeiten kann man....

aus Tabellen ablesen

berechnen

mit dem Larson-Nomogramm bestimmen

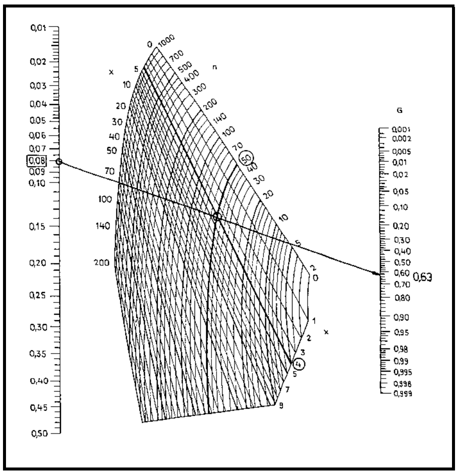
Fehleranteil in der Grundgesamtheit = 2%

x \ n	5 g(x)	5 G(x)	10 g(x)	10 G(x)	20 g(x)	20 G(x)	50 g(x)	50 G(x)	100 g(x)	100 G(x)
0	0,9039	0,9039	0,8171	0,8171	0,6676	0,6676	0,3642	0,3642	0,1326	0,1326
1	0,0922	0,9962	0,1667	0,9838	0,2725	0,9401	0,3716	0,7358	0,2707	0,4033
2	0,0038	0,9999	0,0153	0,9991	0,0528	0,9929	0,1858	0,9216	0,2734	0,6767
3	0,0001	1,0000	0,0008	1,0000	0,0065	0,9994	0,0607	0,9822	0,1823	0,8590
4	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0006	1,0000	0,0145	0,9968	0,0902	0,9492
5	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0027	0,9995	0,0353	0,9845
6			0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0004	0,9999	0,0114	0,9959
7			0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0001	1,0000	0,0031	0,9991
8			0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0007	0,9998
9			0,0000	1,0000	0,0000	[illegible]	[illegible]	1,0000	0,0002	1,0000
10			0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000
11					0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000
12					0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000
13					0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000

p=2%

$$g(x) = \frac{n!}{x! \cdot (n-x)!} \cdot p^x \cdot (1-p)^{(n-x)}$$

$$P_{(A\,und\,B)} = P_A \cdot P_B$$



Um was geht es bei der Wahrscheinlichkeitslehre?

Einzelerscheinungen wie die Zufallszahl auf dem Würfel, oder das zufällig streuende Meßergebnis, sind nicht vorhersehbar und nicht berechenbar.
Massenerscheinungen, bei denen eine große Zahl von Einzelerscheinungen zusammengefaßt sind, weisen sehr wohl Gesetzmäßigkeiten auf, die mit den Mitteln der Wahrscheinlichkeitslehre vorhersehbar sind.

Ist das Ergebnis einer Zählung oder Messung für die Einzelmessung nicht vorherzusagen, so wird dies als zufällig bezeichnet. Für eine große Zahl von gleichartigen Beobachtungen kann in der Regel dennoch eine Aussage gemacht werden, nämlich die Wahrscheinlichkeit, mit der ein bestimmtes Ereignis eintritt.

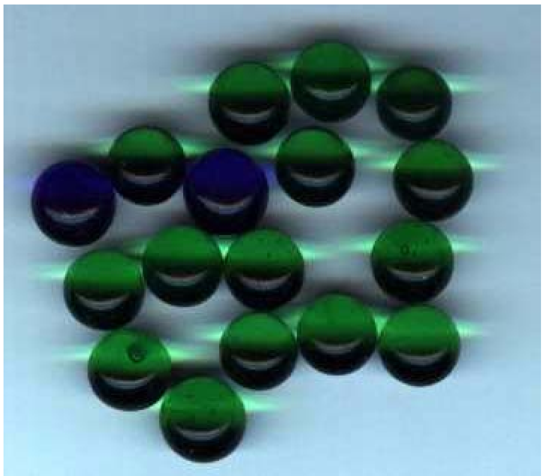
P(E)= **Wahrscheinlichkeit** für das Ereignis E.
P(E) = 1 Sicheres Ereignis
P(E) = 0 Unmögliches Ereignis
P(E) = 0,5 z.B.P(Adler) bei Münzwurf

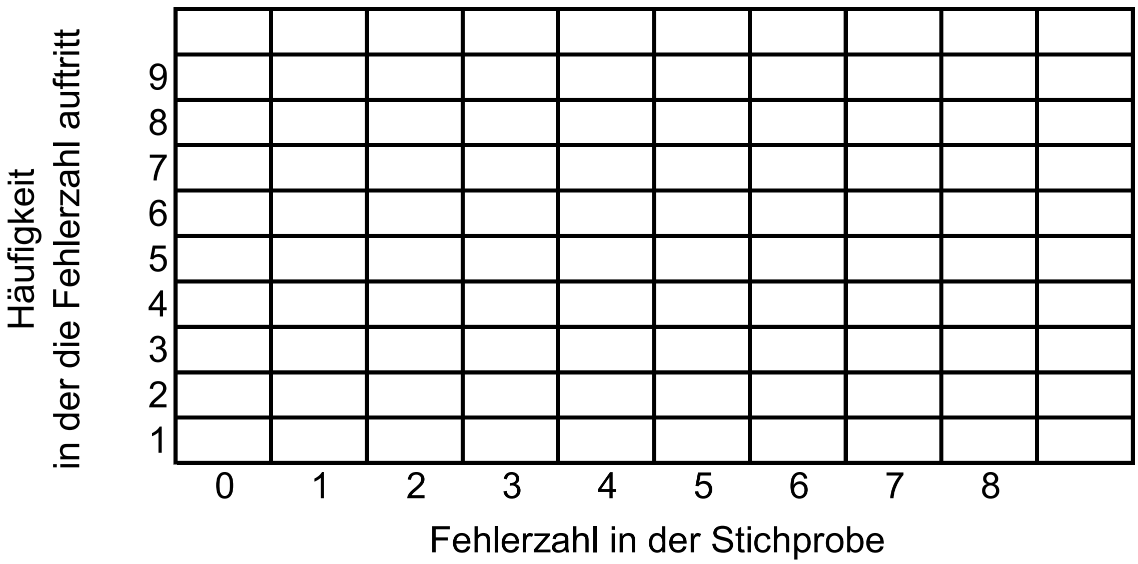
$$\boxed{P(E) = \frac{\text{Anzahl der für das Ereignis günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}}}$$

Experiment

Ein Fertigungsprozeß liefert 10% Fehler. Diese Fehlerrate wird als akzeptabel angesehen. Es geht jetz darum, zu prüfen, ob die Fehlerrate konstant bleibt.
Dazu werden Stichproben (jeweils n = 10 Teile) entnommen.
Dieser Praxisversuch wird mit einem Kugelmodell simuliert.

Im Kugelbehälter sind 100 Kugeln (grün), davon sind 10 fehlerhaft (blau). Ziehen Sie 20 Stichproben n = 10 und tragen Sie die gefundene Fehlerzahl in das Häufigkeitsschaubild ein.





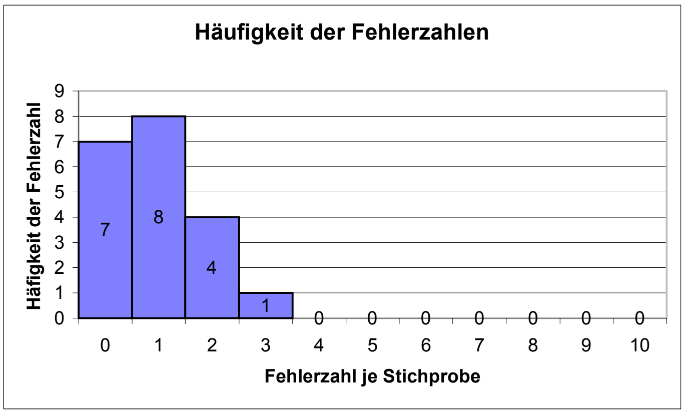
Ergebnis:
Es ist offensichtlich ganz normal, wenn man neben dem erwarteten 1 Fehler (da 10%) auch 0, 2, 3, 4 usw. Fehler findet. Wenn allerdings 7 oder 8 Fehler entdeckt werden, dann kann eine Prozeßstörung vermutet werden.

Da 20 Stichproben gezogen wurden, lassen sich die Häufigkeiten, nach denen 1, 2, 3 usw. Fehler gefunden werden, auch prozentual ausrechnen.

Zum Beispiel:
Relative Häufigkeit (2 Fehler) = Häufigkeit in der 2 Fehler gefunden wurden / 20

Aufgabe: Berechnen Sie alle Häufigkeiten in % und schreiben Sie diese an die Balken.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung liefert die Möglichkeit, für eine sehr große Zahl von Versuchen, das Ergebnis zu berechnen. Die Darstellung Häufigkeit der Fehlerzahlen zeigt die theoretische Berechnung.



Wie wird die Wahrscheinlichkeit bestimmt?

1. Sind die **Verhältnisse eindeutig**, wie z.B. beim Würfel, dann kann man die Wahrscheinlichkeit nach der Formel bestimmen.

$$P(E) = \frac{\text{Anzahl der für das Ereignis günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}}$$

2. Bei **zufälligen Ereignissen** wird die Wahrscheinlichkeit durch die Häufigkeit ersetzt. Die Häufigkeit ist ein umso besserer Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit, je größer die Anzahl von Versuchen ist.

Beispiel zu 1.:
Die Losgröße beträgt N = 4000 Schrauben. Sie enthält 60 fehlerhafte Schrauben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit P, eine fehlerhafte Schraube bei der Entnahme eines Teils zu finden?

Was sagt die UND-Regel

Bei der UND-Regel werden Wahrscheinlichkeiten mehrerer Ereignisse verknüpf die gleichzeitig eintreffen. Zum Beispiel die Wahrscheinlichkeit, nach der aus einem Kartenspiel einmal ein König **UND** dann noch einmal ein König gezogen wird.

$$\boxed{P_{(A\,und\,B)} = P_A \cdot P_B}$$

Beispiel Skatspiel:
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß beim ersten **UND** beim zweiten Mal ein König gezogen wird?
$P_{(König\ UND\ Dame)} = P_{König} * P_{König} = 4/32 * 4/32 = 1/8 * 1/8 = 1/64 = 0{,}156 =$ **15,6%**

Aufgabe Würfel:
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine 2 und dann noch eine 2 gewürfelt wird?
$P_{(2\ UND\ 2)} = P_2 * P_2 =$

Aufgabe Würfel:
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß 4mal keine 6 gewürfelt wird?
$P_{(4\ mal\ keine\ 6)} =$

Was ist, wenn die Karten nicht zurückgelegt werden?
Die Wahrscheinlichkeit, 4mal hintereinander ein Ass zu ziehen beträgt:
P (4mal Ass) = P(Ass) * P(Ass) * P(Ass) * P(Ass) = 4/32 * 4/32 * 4/32 * 4/32 = **0,0244%**
Werden die Karten aber nicht zurückgelegt, so ergibt sich ein anderes Bild:
P (4 mal Ass) = 4/32 * 3/31 * 2/30 * 1/29 = **0,0027%**

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für 6 Richtige im Lotto?

Was sagt die ODER-Regel?

Sie gilt für zwei sich einander ausschließende Ereignisse A oder B (Kopf oder Zahl), von denen entweder das eine oder das andere eintritt.

$$\boxed{P_{(A\,oder\,B)} = P_A + P_B}$$

Beispiel mit einem Würfel:
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß entweder ein König oder ein Ass gezogen wird?
$P_{(Kö\ oder\ Ass)} = P_{(Kö)} + P_{(Ass)} = 1/8 + 1/8 = 2/8 = 1/4 = 0{,}25 =$ **25%**

Im obigen Beispiel schließen sich die Ereignisse aus, d.h. es kann nur entweder ein König oder ein Ass gezogen werden werden.

Was ist, wenn die Ereignisse A und B unabhängig voneinander sind?
Wenn man z.B. mit 2 Würfeln wirft?
Dann gilt die **allgemeine ODER-Regel für zwei unabhängige Ereignisse**

$$\boxed{P_{(A\,oder\,B)} = P_{(A)} + P_{(B)} - P_{(A)} \cdot P_{(B)}}$$

Beispiel:
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß der erste Wurf eine 2 ODER der 2.Wurf eine 2 ist?
P (2 oder 2) = P(2) + P(2) - P(2) * P(2) = 1/6 + 1/6 - 1/6 * 1/6 = 0,306 = **30,6%**

Die Fakultät

Die vorherigen Aufgaben lassen sich erleichtert berechnen, wenn man die Rechenoperation Fakultät beherrscht.

4 * 3 * 2 * 1 = <u>4!</u>

Bei abgebrochenen Reihen gilt folgende Regel:

20 * 19 * 18 * 17 = <u>20! / 16!</u>

Die Binomialverteilung

Entnimmt man einer Grundgesamtheit von Teilen Stichproben vom Umfang n, so sind die gefundenen Fehler Binomialverteilt.

Damit ist die Binomialverteilung einsetzbar für die Frage:
<u>Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, in einer Stichprobe genau x fehlerhafte Teile zu finden?</u>

g(x) = Wahrscheinlichkeit, in der Stichprobe genau x fehlerhafte Teile zu finden
x = Fehler in der Stichprobe
n = Anzahl der Teile in der Stichprobe
p = Fehleranteil in der Gesamtheit

$$g(x) = \frac{n!}{x! \cdot (n-x)!} \cdot p^x \cdot (1-p)^{(n-x)}$$

G(x) = Wahrscheinlichkeit, in der Stichprobe bis zu x fehlerhafte Teile zu finden. Um G(x) zu berechnen, müssen alle Wahrscheinlichkeiten von g(x) bis zu x zusammenaddiert werden. Mit EXCEL läßt sich auch G(x) direkt ausrechnen. Ansonsten wird zur Bestimmung der Summen-wahrscheinlichkeit G(x) das Larson-Nomogramm benutzt.

Beispiel Glühlampen
In einer Lieferung von Glühlampen befinden sich 2,5% fehlerhafte Einheiten. Mit welchen Wahrscheinlichkeiten findet man in einer Stichprobe des Umfangs n = 100 genau x = 0, 1, 2, 3, 4 .... fehlerhafte Lampen.

$x = 0:$

$$g(0) = \frac{100!}{0! \cdot (100-0)!} \cdot 0{,}025^0 \cdot (1-0{,}025)^{(100-0)} = 0{,}0795 = \underline{\underline{7{,}95\%}}$$

x = 1 :

x = 2 :

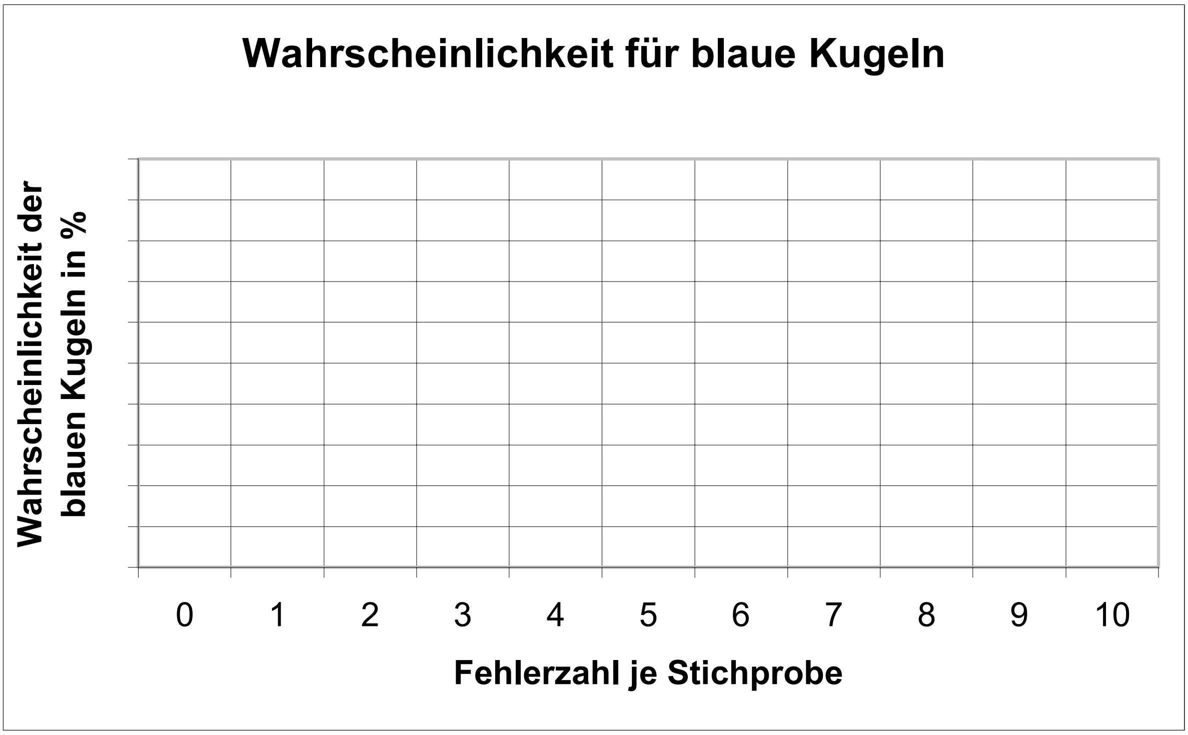
x = 3 :

x = 4 :

Die Berechnung in EXCEL für g(x):
=BINOMVERT(A38;100;0,025;FALSCH)
x steht in Zelle A38
n = 100
p = 0,025 (2,5%)

Die Berechnung in EXCEL für G(x):
=BINOMVERT(A38;100;0,025;WAHR)

Darstellung des Ergebnisses des Kugelversuchs von Seite 2 (blaue Kugeln = Fehler). Die Wahrscheinlichkeiten für 0, 1, 2 ... Fehler werden berechnet mit der Formel für g(0), g(1) ...



Frage: Mit welcher Wahrscheinlichkeit G(x) findet man in der Stichprobe bis zu 2 fehlerhafte Einheiten?

Entweder sind die Einzelwahrscheinlichkeiten zu addieren, oder man verwendet die EXCEL Tabellenkalkulation mit der Formel von Seite 5.

Aufgabe: Ermitteln Sie für das Experiment von Seite 2 die theoretischen Werte.

Das Larson-Nomogramm

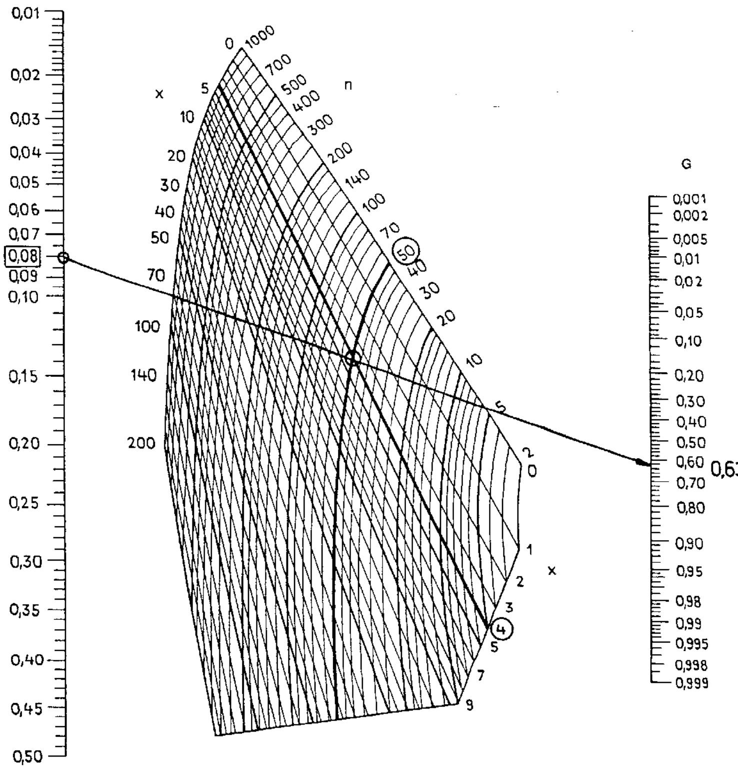
Ein praktisches Hilfsmittel beim Umgang mit der Binomialverteilung stellt das Larson-Nomogramm dar. Es zeigt in graphischer Form den Zusammenhang zwischen dem Anteil fehlerhafter Einheiten in der Grundgesamtheit (p), der Anzahl fehlerhafter Einheiten in der Stichprobe (x), vom Umfang der Stichprobe (n) und der dazugehörigen Wahrscheinlichkeitssumme (G(x).

Wird jedoch die Einzelwahrscheinlichkeit g(x) gesucht (Wie wahrscheinlich ist es, genau x fehlerhafte Teile zu finden), dann gilt g(x) = G(x) - G(x-1).
zum Beispiel: g(5) = G(5) - G(4)
G(5) = Wahrscheinlichkeit **bis zu** 5 Fehler zu finden
G(4) = Wahrscheinlichkeit **bis zu** 4 Fehler zu finden
g(5) = Wahrscheinlichkeit **genau** 5 Fehler zu finden

Übungsbeispiel Larson-Nomogramm

Aufgabe:
Der Fehleranteil in einer Fertigungsserie ist 8%, d.h. **p = 0,08.**
Die entnommenen Stichproben haben den Umfang **n = 50**
Es ist mit dem Larson-Nomogramm zu ermitteln, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, in der Stichprobe **genau 4** fehlerhafte Einheiten zu finden. Es wird also g(4) gesucht.

Da das Larson-Nomogramm nur die Summenwahrscheinlichkeit G(x) liefert, muß g(4) mit Hilfe der Beziehung g(4) = G(4) - G(3) bestimmt werden.



Wie G(4), also die Wahrscheinlichkeit **bis zu** 4 fehlerhafte Teile zu finden, ermittelt wird, ist im Larson-Schaubild an der eingetragenen Linie zu erkennen. Es wird eine Linie von p = 0,08 (links), durch den Kreuzungspunkt X=4 und n=50 bis zur Skala G(x) (rechts) gezogen. Für G(4) ergibt sich also 63%.

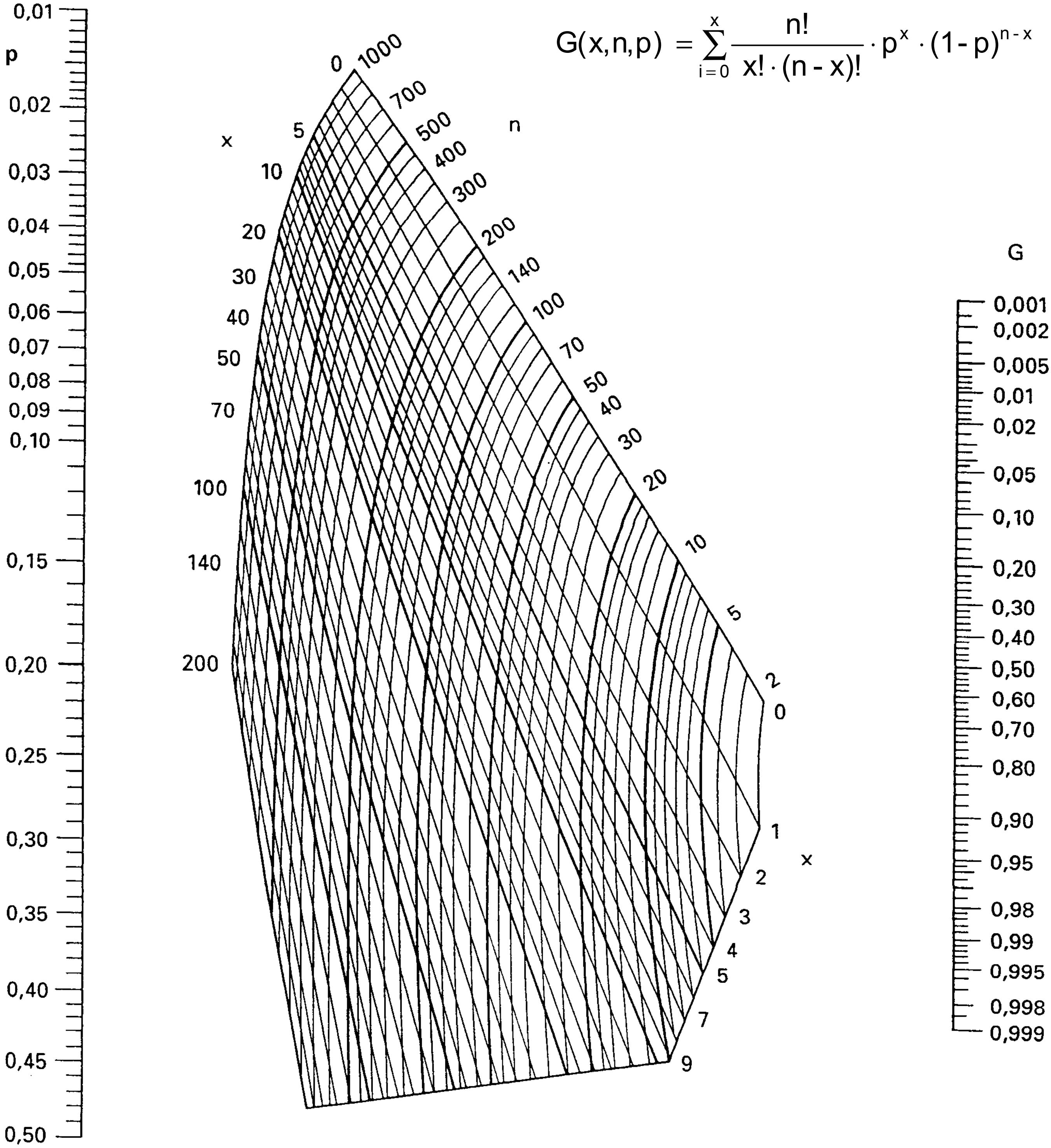
Ebenso ist G(3) zu bestimmen und dann wird G(4) - G(3) gerechnet. Die Differenz ist g(4), also die Wahrscheinlichkeit **genau** 4 Fehler zu finden.

Übungsbeispiel 1:
p = 5%, n=20
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit genau 2 fehlerhafte Teile in der 20er Stichprobe zu finden? Lösung mit Larson Nomogramm.

Übungsbeispiel2:
Eine Fertigung läuft mit p = 6%, es werden Stichproben mit n=20 gezogen.
Bei welcher Fehlerzahl x wird die Wahrscheinlichkeit des Auffindens erstmals kleiner als 10%, man kann auch sagen, bei welcher Fehlerzahl x wird der Zufallsstreubereich größer als 90%?

Larson-Nomogramm

$$G(x,n,p) = \sum_{i=0}^{x} \frac{n!}{x! \cdot (n-x)!} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}$$



Musterbeispiel

Gegeben: Fehler in der Grundgesamtheit **p = 0,08**

Gesucht: Wie wahrscheinlich ist es, in einer Stichprobe von **n = 10**, **bis zu 1** Fehler zu finden?

Lösung: Linie von Links 0,08 über den Kreuzungspunkt n=10 und x=1 eine Linie bis nach G ziehen.

Ergebnis: Die Wahrscheinlichkeit **bis zu 1** Fehler (= 0 oder 1) zu finden, beträgt **0,81 = 81%**
Die Wahrscheinlichkeit **genau 1** Fehler zu finden beträgt 81% minus 43% (für 0 Fehler) = **38%**